

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ РАКЕТНО-КОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ
ДНІПРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ імені ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна «Математичний аналіз»

спеціальність 121 Інженерія програмного забезпечення

освітньо-професійна програма Розробка програмного забезпечення

Дніпро

2023

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема

Дії над комплексними числами

сформувати у студентів практичні навички при знаходженні суми, різниці, множенні та діленні комплексних чисел.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 63...66 [1], с. 342	10хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Розв'язування завдань.

1. Знайти дійсні значення x , для яких дане комплексне число являється уявним:

а) $(x+3)+(-2i)$; б) $(9-x^2)-3i$

Розв'язання: а) комплексне число буде уявним, якщо дійсна частина дорівнює нулю, тоді $x+3=0$ і $x=-3$;

б) $9-x^2=0$, $x^2=9$, $x=\pm 3$.

2. Знайти дійсні значення x , для яких дане комплексне число являється дійсним:

а) $-3+(2-x)i$; б) $4+(x^3-25x)i$

Розв'язання: а) комплексне число буде дійсним, якщо уявна частина дорівнює нулю, тоді $2-x=0$ і $x=2$;

б) $x^3-25x=0$, $x(x^2-25)=0$, $x=0$ або $x^2-25=0$, $x=\pm 5$.

3. Знайти комплексні числа , які протилежні і спряжені до даних:

а) $z = 3 + i$,б) $z = -5 - 2i$, в) $z = -3i$:

Розв'язання: протилежне $(-z)$ і спряжене $(\bar{z})$, тоді

а) $-z = -3 - i$ і $\bar{z} = 3 - i$;

б) $-z = 5 + 2i$ і $\bar{z} = -5 + 2i$;

в) $-z = 3i = \bar{z}$.

4. Знайти дійсні числа x і y із умови рівності двох комплексних чисел:

а) $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$, для цього виділимо в обох частинах рівності дійсні та уявні частини $-2 + (5x - 3y)i = 2x - 4y + 9i$, застосуємо рівність комплексних чисел і складемо систему

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}, \text{розв'язавши її отримаємо, що } x = 3 \text{ і } y = 2.$$

б) $x^2 - 3(x+1) + 2i = yi - 5$, виділимо дійсні та уявні частини

$$x^2 - 3x - 3 - yi = -5 - 2i, \begin{cases} x^2 - 3x - 3 = -5 \\ -y = -2 \end{cases}, \text{розв'язавши її отримаємо, що } x_1 = 1, x_2 = 2,$$

$$y = 2$$

5. Виконати додавання комплексних чисел:

а) $(2 + 3i) + (4 + 2i) = (2 + 4) + (3 + 2)i = 6 + 5i$;

б) $(-7 + 6i) + (-3 - 8i) = (-7 + (-3)) + (6 + (-8))i = -10 + (-2)i = -10 - 2i$.

6. Виконати віднімання комплексних чисел:

а) $(4 + 3i) - (1 + 2i) = (4 - 1) + (3 - 2)i = 3 + i$;

б) $(5 - i) - (-1 - 3i) = (5 - (-1)) + ((-1) - (-3))i = 6 + 2i$.

7. Виконати дії:

$$(8 - 3i) - (-2 + 5i) + (10 - 4i) = (8 - (-2) + 10) + (-3 - 5 + (-4))i = 20 - 12i$$

8. Виконати добуток комплексних чисел:

а) $2i \cdot 3i = 2 \cdot 3 \cdot (i)^2 = 6 \cdot (-1) = -6$;

б) $(2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - (-9) = 4 + 9 = 13$;

в) $(5 - 4i)(3 + 2i) = [5 \cdot 3 - (-4) \cdot 2] + i[5 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)] = 23 - 2i$.

9. Виконати ділення комплексних чисел:

а) $\frac{2}{3i} = \frac{2(-i)}{3i(-i)} = \frac{-2i}{3} = -\frac{2}{3}i$;

б) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

в) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$;

г) $\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i$.

Розв'язати завдання

1. Знайти дійсні значення x , для яких дане комплексне число являється уявним:

- 1) $(5x-2)+2i$, 2) $(x^2-25)+i$, 3) $(3x^2+9x)-i$,
4) $(x^2-2x+3)+3i$, 5) $(3-x)\sqrt{x^2-7x+10}+(-5i)$.

2. Знайти дійсні значення x , для яких дане комплексне число являється дійсним:

- 1) $-2+(3-x)i$, 2) $1+(1-16x^2)i$, 3) $5+(x^3-36x)i$
4) $-2+(2x^2-x-3)i$, 5) $5+(x+2)\sqrt{x}i$, 6) $-1+\frac{x-2}{x^2-4}i$.

3. Знайти комплексні числа, які протилежні і спряжені до даних:

- 1) $z=1+i$, 2) $z=-2-6i$, 3) $z=\sqrt{3}-4i$, 4) $z=\ln 3$, 5) $z=e^2i$.

4. Знайти дійсні числа x і y із умови рівності двох комплексних чисел:

- 1) $9+2ix+4iy=10i+5x-6y$, 2) $2ix+3iy+17=3x+2y+18i$,
3) $x^2-5(x-1)+4i=yi-1$, 4) $x^2-3(x+1)+2i=yi-5$,
5) $(x+3yi)+(\frac{3}{2}y+2xi)=4+8i$, 6) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$.

5. Побудувати радіуси-вектори $z, \bar{z}, -z$, які відповідають комплексним числам:

- 1) $z=3+i$, 2) $z=-1+2i$, 3) $z=-2-5i$, 4) $z=3-6i$, 5) $z=-4i$,
6) $z=-4+i$, 7) $z=2$, 8) $z=6-i$, 9) $z=-1-3i$, 10) $z=2+4i$

6. Яке комплексне число відповідає точці на комплексній площині:

- 1) $(0;3)$, 2) $(-4;2)$, 3) $(-4;0)$, 4) $(-1;-3)$, 5) $(1;5)$,
6) $(0;-1)$, 7) $(-3;5)$, 8) $(5;0)$, 9) $(4;-5)$, 10) $(1;1)$.

7. Зобразити геометрично суму і різницю комплексних чисел.

- 1) $z_1=3+2i$ і $z_2=1+4i$, 2) $z_1=4-2i$ і $z_2=-1+5i$,
3) $z_1=-2-3i$ і $z_2=3-2i$, 4) $z_1=5-2i$ і $z_2=2+6i$,
5) $z_1=6i$ і $z_2=6-5i$, 6) $z_1=-2i$ і $z_2=4$,
7) $z_1=4+i$ і $z_2=2+5i$, 8) $z_1=-4-2i$ і $z_2=-1-5i$,
9) $z_1=5-i$ і $z_2=2+3i$, 10) $z_1=-1+2i$ і $z_2=1-i$.

8. Виконати додавання комплексних чисел:

- 1) $(4-7i)+(4+7i)$, 2) $(-4+5i)+(3-2i)$, 3) $(-5-2i)+(-6+8i)$
4) $(3+2i)+(4-2i)$, 5) $(-0,7+0,3i)+(0,9-1,7i)$, 6) $(-0,4-2,1i)+(0,6+3i)$
7) $(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$, 8) $(-3-2i)+(4-5i)+(-8+6i)$,
9) $-4+(3-6i)+(-7-4i)+3i$, 10) $(1,2-0,7i)+(-0,3+0,27i)+(-0,6-0,32i)$

9. Виконати віднімання комплексних чисел:

- 1) $(7-2i)-(7+2i)$, 2) $(3-5i)-(2-i)$, 3) $(-2-3i)-(-4+2i)$,
4) $(-2+6i)-(2+9i)$, 5) $(0,2-0,3i)-(0,4+0,5i)$, 6) $(-0,6+3,1i)-(0,5-2i)$
7) $(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i)-(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i)$, 8) $(3+i)-(-6+3i)-(12-7i)$
9) $(0,6-0,8i)-(0,4+1,7i)-(0,9-0,1i)$, 10) $(3-i)-(-4-2i)-(4+7i)-(-2+5i)$

10. Виконати добуток комплексних чисел:

- 1) $-i\sqrt{5} \cdot 4i\sqrt{5}$, 2) $(5-3i) \cdot 2i$, 3) $(-7-9i)(-3i)$, 4) $(4-6i)(\frac{1}{2}i)$
 5) $(3+4i)(3-4i)$, 6) $(5+3i)(2-5i)$, 7) $(-2-i)(1+i)$, 8) $(0,2-0,3i)(0,5+0,4i)$,
 9) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$, 10) $(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i) \cdot (\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i)$.

11. Виконати ділення комплексних чисел:

- 1) $\frac{1}{i}$, 2) $\frac{6}{1+i}$, 3) $\frac{4}{1-3i}$, 4) $\frac{1+2i}{2-i}$, 5) $\frac{3-2i}{1+3i}$, 6) $\frac{4-5i}{-2+7i}$,
 7) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$, 8) $\frac{(3+4i)(-1+3i)}{6+8i}$, 9) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$, 10) $\frac{-4+6i}{(2+i)(3-2i)}$,
 11) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема

Показникова форма комплексного числа

Мета заняття

сформувати у студентів практичні навички при знаходженні суми, різниці, множенні та діленні комплексних чисел, заданих в алгебраїчній, тригонометричній та показникової формах; вміння переходити від однієї форми комплексного числа до іншої.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 67...69	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Показникова форма комплексного числа

Скористаємося формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тоді комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ матиме такий вигляд $z = re^{i\varphi}$ - така форма запису комплексного числа називається показниковою.

(За формулою Ейлера $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$, якщо $x = 0$, то $e^{ib} = \cos b + i\sin b$).

Так як функції $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ мають період $2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, то і показникова функція $e^{i\varphi}$ теж має період $2\pi i$.

Дії над комплексними числами $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ в показниковій формі :

1. Добуток

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

2. Ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

3. Піднесення до степеня

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

4. Здобуття кореня n -го степеня

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

За допомогою формул Ейлера можна переходити із тригонометричної форми в показникову і навпаки

Приклади розв'язання типових задач

1. Записати комплексні числа в показниковій формі :

а) $z = 2i$.

Розв'язання: за умовою $a = 0$ і $b = 2$, тоді $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ і

$$\varphi = \arctg \frac{2}{0} = \frac{\pi}{2} \text{ і за формулою } z = re^{i\varphi} \text{ отримаємо } z = 2e^{i\frac{\pi}{2}};$$

б) $z = -1 + i$.

Розв'язання: за умовою $a = -1$ і $b = 1$, тоді $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\text{і } \varphi = \arctg \frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4} \text{ і отримаємо } z = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

2. Записати комплексні числа в алгебраїчній формі:

а) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $e^{2+i\pi} = e^2 (\cos \pi + i \sin \pi) = e^2 ((-1) + i \cdot 0) = -e^2.$

3. Для комплексних чисел $z_1 = 1 + i$ і $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ обчислити

1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $z_1 : z_2$; 3) z_1^6 ; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

Розв'язання:

1) спочатку запишемо комплексні числа в показниковій формі

Для числа $z_1 = 1 + i$ $a = 1$, $b = 1$, $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, тоді $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, для числа

$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, тоді $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, таким

чином $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

$$2) z_1 : z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} : 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}};$$

$$3) z_1^6 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}};$$

$$4) z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4} + 2\pi\kappa)}{4}}, \kappa = 0, 1, 2, 3$$

$$\kappa = 0, \text{ то } z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}, \kappa = 1, \text{ то } z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4} + 2\pi)}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}};$$

$$\kappa = 2, \text{ то } z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4} + 4\pi)}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}, \kappa = 3, z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4} + 6\pi)}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}$$

Розв'язати завдання

1. Записати у тригонометричній формі наступні комплексні числа:

$$1) z = 4, \quad 2) z = -3, \quad 3) z = 5i, \quad 4) z = -7i, \quad 5) z = -1 + i, \quad 6) z = \sqrt{3} - i,$$

$$7) z = -2 - 2i, \quad 8) z = -3 + 4i, \quad 9) z = 2 + 2i\sqrt{3}, \quad 10) z = -5 + i,$$

$$11) z = 7, 2 + 5, 1i, \quad 12) z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}.$$

2. Записати в алгебраїчній формі:

$$1) z = 3(\cos 0 + i \sin 0), \quad 2) z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}), \quad 3) z = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}),$$

$$4) z = 4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})), \quad 5) z = \cos \pi + i \sin \pi, \quad 6) z = \sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})),$$

$$7) z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}), \quad 8) z = 6(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}), \quad 9) z = \cos 24 + i \sin 24,$$

$$10) z = 5(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$

3. Знайти добуток : 1) $(\cos 10 + i \sin 10) \cdot 3(\cos 35 + i \sin 35)$,

$$2) 2(\cos 130 + i \sin 130) \cdot 4(\cos 140 + i \sin 140), \quad 3) 2(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \cdot (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}),$$

$$4) 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot 5(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})), \quad 5) (\cos 5 + i \sin 5)(\cos 2 + i \sin 2),$$

$$6) (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \cdot (\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})), \quad 7) (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) \cdot (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}),$$

$$8) 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}), \quad 9) 0(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \cdot \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})),$$

$$10) 5(\cos 120 + i \sin 120) \cdot (\cos 80 + i \sin 80) \cdot 4(\cos 70 + i \sin 70)$$

4. Виконати ділення з комплексними числами із завдання №3

5. Піднести до степеня :

$$1) (6(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}))^4, 2) (2(\cos 20 + i \sin 20))^{12}, 3) (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{100}, 4) (\sqrt{3} + i)^{50},$$

$$5) (-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}})^8, 6) (-2 - 3i)^5, 7) (\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i)^{10}, 8) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}, 9) \frac{1}{(\cos 9 + i \sin 9)^5},$$

$$10) (1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7.$$

6. Обчислити корінь з комплексного числа:

$$1) \sqrt[3]{-1}, 2) \sqrt[4]{4}, 3) \sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}, 4) \sqrt[3]{-3-3i}, 5) \sqrt[5]{3+\sqrt{3}i}, 6) \sqrt[6]{1+i}, 7) \sqrt[4]{2i}, 8) \sqrt[4]{-3i}, 9) \sqrt[3]{5-5i}, 10) \sqrt[3]{\cos 30 + i \sin 30}$$

7. Записати комплексні числа в показниковій формі :

$$1) z = 4, 2) z = -3, 3) z = 5i, 4) z = -7i, 5) z = -1+i, 6) z = \sqrt{3}-i,$$

$$7) z = -2-2i, 8) z = -3+4i, 9) z = 2+2i\sqrt{3}, 10) z = -5+i,$$

$$11) z = 7,2+5,1i, 12) z = -\sqrt{2}+i\sqrt{6}.$$

8. Записати комплексні числа в алгебраїчній і тригонометричній формах :

$$1) 3e^{\frac{2i\pi}{3}}, 2) 4e^{-\frac{i\pi}{4}}, 3) e^i, 4) e^{0i}, 5) 2e^{\frac{i\pi}{2}}, 6) 5e^{\frac{i\pi}{2}}, 7) \sqrt{2}e^{i\pi}, 8) 3e^{i \cdot 2\pi}, 9) 6e^{1,5i}, 10) 14e^{\frac{i17\pi}{90}}$$

9. Для даних пар комплексних чисел обчислити

$$a) z_1 \cdot z_2; b) \frac{z_1}{z_2}; c) \frac{z_2}{z_1}; d) z_1^6; e) z_2^4; f) \sqrt[4]{z_1}:$$

$$1) z_1 = -1+i \quad i \quad z_2 = 1+i\sqrt{3}; 2) z_1 = -\sqrt{3}+i \quad i \quad z_2 = 1-i;$$

$$3) z_1 = 1 \quad i \quad z_2 = -i; 4) z_1 = i \quad i \quad z_2 = -\sqrt{3}-i\sqrt{3};$$

$$5) z_1 = -5-5i \quad i \quad z_2 = \sqrt{3}+i.$$

10. Виконати дії і результат записати в показниковій, тригонометричній і алгебраїчній формах:

$$1) 2e^{i\frac{7\pi}{8}} \cdot 3e^{i\frac{11\pi}{18}}, 2) e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{12}}, 3) 6e^i : (3e^{-i}),$$

$$4) 4e^{i\frac{5\pi}{9}} : (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}}), 5) (\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{9}})^3, 6) (2e^{i\frac{7\pi}{9}})^{10}.$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Перша та друга важливі границі. Наслідки.

Мета сформувати у студентів практичні навички обчислення границі функції, формувати вміння обчислювати границю функції, користуючись першою і другою важливими границями та їх наслідками.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.184...206 [1], с. 169	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

- Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
- Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали

Розв'язування завдань

Порівняти нескінченно малі функції

$$1) \alpha(x) = x^2 + 3x + 2 \quad \text{та} \quad \beta(x) = \operatorname{tg}(x+1), \quad \text{при } x \rightarrow -1$$

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\operatorname{tg}(x+1)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1$$

Отже функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - нескінченно малі одного порядку.

$$2) \alpha(x) = x \arctg x^{-2} \quad \text{та} \quad \beta(x) = (x-3)^{-1/3}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arctg x^{-2}}{(x-3)^{-1/3}} = \{x-3 \approx x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arctg x^{-2}}{x^{-1/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x^{-2}}{x^{-4/3}} = \{x^{-2} = t\} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctg t}{t^{2/3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^{2/3}} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{1/3} = 0$$

Отже функція $\alpha(x)$ - нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$

$$3) \alpha(x) = x^2 + 1 \quad \text{та} \quad \beta(x) = \frac{2x^3 + 3x + 4}{2x + 1}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{\frac{2x^3 + 3x + 4}{2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)(2x + 1)}{2x^3 + 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x^2})(2 + \frac{1}{x})}{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = 1$$

$$\text{Отже функції } \alpha(x) \text{ і } \beta(x) - \text{еквівалентні} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4)} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}.$$

Обчислити границі функцій, використовуючи першу важливу границю.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 3\cos 2x + 2}{\cos x - \cos 3x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x - 1)(\cos 2x - 2)}{2 \sin 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin 2x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \pi - x = t \\ x \rightarrow \pi, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(5\pi - 5t)}{\sin(2\pi - 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{-\sin 2t} = -\frac{5}{2}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} &= \{0 \cdot \infty\} = \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = t \\ x \rightarrow 2, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi(2+t)}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t(-\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4}) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi}; \\ 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{3}}{2}}{4 \sin \frac{x - \frac{\pi}{3}}{2} \sin \frac{x + \frac{\pi}{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos \frac{x - \frac{\pi}{3}}{2}}{2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Обчислити границі функцій, використовуючи другу важливу границю.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{3x-2} &= \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-2}{x+1} - 1 \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x+1} \right)^{3x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-3}} \right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot \frac{-3}{x+1} (3x-2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(3x-2)}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x+6}{x+1}} = e^{-9} = \frac{1}{e^9} \\ 2) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3x+6}{x+4} \right)^{\frac{2}{x+1}} &= \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{3x+6}{x+4} - 1 \right)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{2(x+1)}{x+4} \right)^{\frac{2}{x+1}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+4}{2(x+1)}} \right)^{\frac{x+4}{2(x+1)} \cdot \frac{2}{x+4} \cdot \frac{2}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x+4}} = e^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{e^4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \{1^\infty\}.$$

Для розв'язання скористаємося формулою:

Нехай потрібно обчислити границю $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)}$, де $u(x) \rightarrow 1, v(x) \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow x_0$,

$$\text{тоді } \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left((1 + (u(x) - 1))^{\frac{1}{u(x) - 1}} \right)^{(u(x) - 1)v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1)v(x)} = e^A$$

Позначимо, в нашому випадку, $u(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}, v(x) = \frac{1}{x^2}, u(x) \rightarrow 1, v(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$, тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2 \cos 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}, \text{ отже } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \end{aligned}$$

Обчислити границі функції, використовуючи наслідки з другої важливої границі.

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 4^{-x}}{2^{\sin x} - 1} &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1) - (4^{-x} - 1)}{\frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x} \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1) - (4^{-x} - 1)}{\ln 2 \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4^x - 1}{x} + \frac{4^{-x} - 1}{-x}}{\ln 2 \frac{\sin x}{x}} = \frac{\ln 4 + \ln 4}{\ln 2} = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1 + x^2) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln \cos 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln(1 - 2 \sin^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} x^2}{\frac{\ln(1 - 2 \sin^2 x)}{-2 \sin^2 x} (-2 \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2 \sin^2 x} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arcsin 3x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin 5x \approx 5x, x \rightarrow 0 \\ \arcsin 3x \approx 3x, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \sin 3x + e^{x^2} - 1}{\operatorname{arctg}^2 x - x + \operatorname{tg} 4x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln(1+x) \approx x, \sin 3x \approx 3x \\ e^{x^2} - 1 \approx x^2, \operatorname{arctg}^2 x \approx x^2 \\ \operatorname{tg} 4x \approx 4x \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3x + x^2}{x^2 - x + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + x^2}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + x}{x + 3} = \frac{4}{3}$$

Обчислити границю функцій:

$$1.1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -3/5} \frac{5x^2 + 8x + 3}{5x^2 - 7x - 6}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+3}}{x^2 + 2x - 8}$$

$$1.2 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{2x+9}}{4x^2 - 3x}$$

$$1.3 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{8x^3 + 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5x - 1}}{x^2 + x - 2}$$

$$1.4 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 2x - 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{12x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x - 1}$$

$$1.5 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 11x - 4}{x^2 + 21x + 68}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{6x+6}}{9x^2 - 4}$$

$$1.6 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{8x^3 + 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5x - 1}}{x^2 + x - 2}$$

$$1.7 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2 - x - 3}{8x^2 - 10x - 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+1}}{x^2 + 3x - 10}$$

$$1.8 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{4x^2 + 3x - 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -1/4} \frac{16x^2 - 1}{\sqrt{12x+4} - \sqrt{4x+2}}$$

$$1.9 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{6x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10x-1} - \sqrt{5x+4}}{2x^2 + x - 3}$$

$$1.10 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{4x^2 - 4x - 15}{2x^2 - 7x + 5}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-1}}{x^3 - 1}$$

$$1.11 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{3x^2 + 10x - 8}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{2x+3}}{2x + 3x - 2}$$

$$1.12 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1/5} \frac{5x^2 - 11x + 2}{10x^2 + 3x - 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-4} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - 3x - 2}$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Практична робота за темою: «Комплексні числа. Границя»

сформувати у студентів практичні навички при знаходженні суми, різниці, множенні та діленні комплексних чисел, заданих в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах; вміння будувати комплексне

Мета

число геометрично, знаходити дійсну і уявну частини комплексного числа; розвинути практичні навички обчислення границі функції, формувати вміння обчислювати границю функції, користуючись першою і другою важливими границями та їх наслідками.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 63...69 [3], с. 175...206	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Студентам надаються картки з індивідуальними завданнями з вивченого модуля: «Комплексні числа. Числові послідовності. Границя функції»

Завдання на картках:

Обчислити границі функцій, використовуючи першу важливу границю.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 8x}{x \operatorname{tg} x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 5} (5 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{10}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 7x}{\sin 3x - \sin 5x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 2x + 1}{1 - \sin x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 5x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 6x^2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin 2x - \cos 2x}{x^2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\sin^2 8x}$ 10) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}$ 11) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x + 1}{\operatorname{tg}^2 x}$ 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x \sin x}$ 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 3x}{\sin 5x + \sin 2x}$ 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 3x}$ 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x - \operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin 4x}$ 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 6x - \operatorname{tg}^2 3x}{\sin x^2}$ 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 4x}$ 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{1 + x^2}$
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ 22) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 x - 3 \sin x + 2}{2x - \pi}$ 23) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 3x}$ 24) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (2x - \pi) \operatorname{tg} x$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{\sin^3 x}$ 26) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \operatorname{tg} \frac{1}{x^2 - 4}$ 27) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 5x + 1}$ 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3) \sin \frac{1}{x - 2}$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$ 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 6 \cos x + 5}{x^2}$ 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ 32) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{1 - \cos 6x}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{tg} 5x}$ 34) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ 35) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 4x}$ 36) $\lim_{x \rightarrow 5} (5 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{10}$
- 37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 8x}{x \operatorname{tg} x}$ 38) $\lim_{x \rightarrow 3} \sin \frac{x - 3}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}$ 39) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ 40) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{ctg} \pi x$

Обчислити границі функцій, використовуючи другу важливу границю і її наслідки.

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 1} \right)^{x+2}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$ 3) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5)^{\frac{2}{x^2 - 4}}$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\ln(\cos \sqrt{x})}$ 5) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x + 5}{2x + 9} \right)^{\frac{3}{x+4}}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$ 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - 2x^2}{3 - 2x^2} \right)^{7 - x^2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x - 3)}{x - 1}$ 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{2x - 1} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{x}}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1)(\ln(x - 2) - \ln(+1))$ 11) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x + 5}{2x + 3} \right)^{x-1}$ 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 4x)}{\ln(\cos 10x)}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3x + 7}{2x + 6} \right)^{\frac{5}{x+2}}$ 14) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^{x+3} - 1}{x^2 + 2x - 3}$ 15) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5)^{\frac{3}{x+2}}$ 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{\sin 3x}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x - 2}{2 - x} \right)^{\frac{2}{x^2 - 1}}$ 18) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x \log_{1-x^2} e)$ 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2)(\ln(2x - 1) - \ln(2x + 3))$

$$\begin{array}{llll}
20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 8^x}{\lg 2x} & 21) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+5}{2x+8} \right)^{\frac{4}{x+3}} & 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^{-x}}{\sin 3x} & 23) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{x-2} \\
24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x-23)}{x^2-8x+12} & 25) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{6x-1} \right)^{4x+2} & 26) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(5x-14)}{x^2-9} & 27) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+2}{x+4} \right)^{\frac{5}{x^2-1}} \\
28) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+7^x)}{\ln(1+5^x)} & 29) \lim_{x \rightarrow \infty} (x-7)(\ln(4x+3) - \ln(4x+1)) & 30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{6x} - 3^{-2x}}{\sin x} \\
31) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{\frac{3x}{2x^2+3}} & 32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{5x} - 2^{-x}}{3x} & 33) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} \right)^{\frac{\sqrt{x}+1}{3}} & 34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x-5)}{x^2-25} \\
35) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x+4} \right)^{\frac{5x^3}{x^2-1}} & 36) \lim_{x \rightarrow 3/4} \frac{e^{4x-3} - 1}{4x^2 - 7x + 3} & 37) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{\frac{x+2}{3}} & 38) \lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos 3x} \cos 2x \\
39) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+7)^{\frac{3}{x^2-4}} & 40) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x-19)}{x^2-5x+4}
\end{array}$$

Обчислити границі функції, використовуючи правила Лопіталя.

$$\begin{array}{llll}
1) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2 - 5x + 2} & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln^2 x & 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2 + 3x + 1} & 5) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \\
6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x - \sin x} & 7) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1) 4^{-x} & 8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{2x^2 - 5x - 3} & 9) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x - 2) 3^{-x} & 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x} \\
11) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x & 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} & 13) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1) & 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \\
15) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} & 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x \cos x}{x^2} & 17) \lim_{x \rightarrow 0} x^4 2^{\frac{1}{x^2}} & 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 4x} \\
19) \lim_{x \rightarrow 2} \ln(5-2x) \ln(4-2x) & 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} & 21) \lim_{x \rightarrow 3} \ln(x-3) \ln(7-2x) & 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 5x} \\
23) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg}^2 x & 24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}} & 25) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - 3 \cos x + 2) e^{\frac{1}{x^2}} & 26) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{x^3 - x + 1} \\
27) \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \ln^2 2x & 28) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 3^x}{x^2 - 6x + 4} & 29) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln^2 x & 30) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{\ln(2x^2 - 1)} \\
31) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4x + 5) 3^{-x} & 32) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{x} & 33) \lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 + 3x + 2) 6^{-x} & 34) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 2^x)}{x} \\
35) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3 x & 36) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) & 37) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \ln^2(x-1) & 38) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)
\end{array}$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Похідна елементарних і складених функцій

Мета заняття Повторити, узагальнити й систематизувати знання про похідну функції, правилами та формулами диференціювання, сформулювати вміння використовувати набуті раніше знання для розв'язування завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с. 98...100 [1], с. 207	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

Навчальні матеріали

Знайти похідні функцій

1) $y = 4x^5 - 3x^4 + 1$

Розв'язання. $y' = (4x^5 - 3x^4 + 1)' = (4x^5)' - (3x^4)' + (1)' = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 = 20x^4 - 12x^3$

2) $y = \frac{3}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

Розв'язання.

$$y' = \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \right)' = (3x^{-4} - 2x^{-\frac{2}{3}})' = (3x^{-4})' - (2x^{-\frac{2}{3}})' = 3 \cdot (-4)x^{-4-1} - 2 \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{2}{3}-1} =$$

$$= -12x^{-5} + x^{-3/2} = -\frac{12}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$3) y = \frac{x^2 + 1}{\sin x}$$

Розв'язання.

$$y' = \left(\frac{x^2 + 1}{\sin x} \right)' = \frac{(x^2 + 1)' \sin x - (x^2 + 1)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin x - (x^2 + 1) \cos x}{\sin^2 x}$$

$$4) y = \arcsin x \cdot \operatorname{tg} x$$

Розв'язання.

$$y' = (\arcsin x \cdot \operatorname{tg} x)' = (\arcsin x)' \operatorname{tg} x + \arcsin x \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{tg} x + \arcsin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Похідна складеної функції

Якщо значеннями аргументу функції $f \in$ значенням функції g , то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$.

Наприклад, розглянемо функції $y = f(t)$ і $t = g(x)$, де $f(t) = 2t - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$.

$$\text{Тоді } f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає складену функцію $y = f(g(x))$.

Розглянемо ще кілька прикладів.

Якщо $f(u) = \sin u$, а $g(x) = 1 - 3x$, то складена функція $y = f(g(x))$ задається формулою $y = \sin(1 - 3x)$. Функцію $y = \cos^2 x$ можна розглянути як складену функцію $y = f(g(x))$, де $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Знаходити похідну складеної функції можна за допомогою такої теореми.

Теорема (Похідна складеної функції)

Якщо функція $t = g(x)$ диференційована в точці x_0 , а функція $y = f(t)$ диференційована в точці t_0 , де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є диференційованою в точці x_0 , причому

$$y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

Приклад.

Знайдіть значення похідної функції в точці x_0 :

$$1) y = (3x - 7)^6, x_0 = 2;$$

$$3) y = \sin \frac{x}{2}, x_0 = \pi;$$

$$2) y = \sqrt{4x^2 - 1}, x_0 = 0;$$

$$4) y = \operatorname{tg}^3 5x, x_0 = \frac{\pi}{15};$$

Розв'язання

1) Дана функція $y = (3x - 7)^6$ є складеною функцією $y = f(t)$ при $t = g(x)$, де $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$.

Оскільки $f' = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то за теоремою про похідну складеної функції можна записати:

$$y'(x) = f'(t)g'(x) = 6t^5 * 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

$$\text{тобто } y'(x) = 6(3x - 7)^5 * 3 = 18(3x - 7)^5;$$

$$y'(2) = 18 * (3 * 2 - 7)^5 = -18.$$

Розв'язання цієї задачі можна оформити і так:

$$y' = ((3x - 7)^5)' = 6 * (3x - 7)^5 * (3x - 7)' = 6 * (3x - 7)^5 * 3 = 18(3x - 7)^5;$$

$$y'(2) = -18.$$

$$2) y' = (\sqrt{4x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} * 4(x^2 + 1)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}};$$

$$y'(0) = 0.$$

$$3) y' = \left(\sin \frac{x}{2}\right)' = \cos \frac{x}{2} * \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$y'(\pi) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$4) y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x * (\operatorname{tg} 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x * \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{15 \operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} = 15 * (\sqrt{3})^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Знайти похідні складених функцій

$$1. y = 3^{\sin x}$$

Розв'язання.

Позначимо $y = 3^u$, де $u = \sin x$, тоді отримаємо

$$y' = (3^u)' = 3^u \ln 3 \cdot u' = 3^{\sin x} \ln 3 \cdot (\sin x)' = \ln 3 \cdot 3^{\sin x} \cos x$$

$$2. y = \operatorname{arctg}^2(x^3 + 1)$$

Розв'язання.

$$y' = (\operatorname{arctg}^2(x^3 + 1))' = 2\operatorname{arctg}(x^3 + 1) \cdot (\operatorname{arctg}(x^3 + 1))' =$$

$$= 2\operatorname{arctg}(x^3 + 1) \cdot \frac{1}{1 + (x^3 + 1)^2} (x^3 + 1)' = 2\operatorname{arctg}(x^3 + 1) \cdot \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 1)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 \operatorname{arctg}(x^3 + 1)}{1 + (x^3 + 1)^2}$$

Знайти похідні складених функцій.

- 1) $y = \cos^2 x + \sin(\operatorname{tg} x)$ 2) $y = \ln^2(\arcsin x)$ 3) $y = 10^{\ln x} \cdot 3^{\operatorname{tg} x}$ 4) $y = 5 \operatorname{arctg}(\ln x) - 1$
- 5) $y = \sqrt[3]{2x+1} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ 6) $y = \sin \sqrt{x} - 2 \sin^3 x$ 7) $y = \ln(\arccos \sqrt{x})$ 8) $y = x^2 / (1 + \cos^2 2x)$
- 9) $y = \ln(\sin x) \cdot (3x^2 - \cos x)$ 10) $y = 4^{\sqrt{x}} \cdot \cos^3(\sqrt{x})$ 11) $y = \ln(x + \arccos 3x)$
- 12) $y = (1 + \cos x)^4 \sin 6x$ 13) $y = \ln^5 \operatorname{arctg} 10x$ 14) $y = e^{x^2} / x + \sin 3x$
- 15) $y = \operatorname{arctg} \ln x / \ln \operatorname{arctg} x$ 16) $y = 10^{2 - \operatorname{tg} 4x}$ 17) $y = (e^{-x^2} + x) \sin(3x + 1)$
- 18) $y = (2 + \ln^2 \sin x)^3$ 19) $y = \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{ctg} x^2$ 20) $y = 2^{5^x} \cdot 4^{\cos x}$
- 21) $y = x \cos^2 x - \operatorname{ctg} 3x$ 22) $y = \arcsin \ln 3x$ 23) $y = x^3 / (1 + \sin^4 x)$
- 24) $y = \sin(x^2 / x + 1)$ 25) $y = \sqrt[3]{(x^4 - 2x)^2} \arcsin x$ 26) $y = \sqrt{1 - x^2} \ln(\arcsin x)$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення похідної складеної функції.
2. Назвіть геометричний зміст похідної функції.
3. Назвіть правила диференціювання.
4. Дайте означення диференційованої функції.
5. Назвіть формули диференціювання.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема **Похідна показниково-степеневої функції. Похідні вищих порядків.**

Мета заняття повторити, узагальнити й систематизувати знання про похідну функції, розглянути метод знаходження похідної показниково-степеневої функції; ознайомитись з означенням похідних вищих порядків та навчитись їх знаходити.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – **2 години**

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення</i>

		<i>присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 214...215	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Похідна показниково-степеневої функції

У деяких випадках при відшуванні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Нехай $u(x), v(x)$ - диференційовані функції від x і необхідно обчислити похідну функції $y = u(x)^{v(x)}$. Для цього прологарифмуємо цю функцію

$$\ln y = \ln(u^v),$$

далі продиференціюємо

$$(\ln y)' = (v \ln u)',$$

звідси

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'$$

$$y' = u^v (v' \ln u + v \frac{1}{u} u') = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$$

Приклад.

1. Обчислити похідну y' від функції $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Знайдемо логарифм даної функції:

$$\ln y = \sqrt{x} \ln \sin x$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності, отримаємо

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sin x + \sqrt{x} \frac{\cos x}{\sin x}$$

звідки

$$y' = y \left(\frac{\ln \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right)$$

або

$$y' = (\sin x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right).$$

2. Обчислити третю похідну від функції $y = x \ln 2x$ в точці $x = 2$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію, отримаємо

$$y' = \ln 2x + x \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1$$

Диференціюючи похідну y' , знайдемо

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x}$$

$$\text{Звідки} \quad y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}$$

При $x = 2$ маємо

$$y'''(2) = -\frac{1}{4}$$

Знайти похідну показниково-степеневі функції

1) $y = x^{\arcsin x}$

2) $y = \lg x^{x/2}$

3) $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

4) $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$

5) $y = (\sin \sqrt{x})^{\sin x}$

6) $y = x^{e^x}$

7) $y = (x^3 + 1)^{\operatorname{ctg} x}$

8) $y = (x + 2)^{x^2 + 1}$

9) $y = (2x - 3)^{\cos x}$

10) $y = (x \sin x)^x$

11) $y = x^{2^x}$

12) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

13) $y = x^{\arccos x}$

14) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$

15) $y = (4x - 3)^{\arccos x}$

16) $y = (x + 5)^{\arcsin x}$

17) $y = (5x + 2)^{\sin x}$

18) $y = (\cos \sqrt{x})^{\cos x}$

19) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{4x-1}$

20) $y = (x^3 + 1)^{2+x}$

Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і означається y''' , $f'''(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n - 1)$ -го порядку $(y^{(n-1)})'$ називається *похідною n -го порядку* і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $n = 1, 2, \dots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x + 4)$.

$$y' = 5\cos(5x + 4); \quad y'' = -25\sin(5x + 4); \quad y''' = -125\cos(5x + 4).$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення функції, заданої параметрично.
2. Як виглядає показниково - степенева функція?
3. Назвіть правила обчислення похідних вищих порядків.
4. Назвіть правила обчислення похідної показниково - степеневої функції.
5. Назвіть формули та правила диференціювання.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Проміжки монотонності і опуклості функцій. Точки екстремуму і перегину.

Мета заняття сформувати у студентів поняття точок екстремуму і перегину, вміння визначати проміжки монотонності і опуклості функцій.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 272...273 [1], с. 246	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали

Проміжки монотонності функції.

Функція $f(x)$ називається зростаючою (спадною) на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних двох точок x_1 і x_2 із інтервалу $(a;b)$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема (достатня умова зростання (спадання) функції)

Нехай функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$. Тоді

- 1) якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на $(a;b)$
- 2) якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на $(a;b)$
- 3) якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ стала на $(a;b)$.

Теорема (необхідна умова зростання (спадання) функції)

Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх $x \in (a;b)$.

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму, а значення функції у цих точках називається відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом.

Теорема 1 (необхідна умова локального екстремуму)

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційована в цій точці, то $f'(x_0) = 0$

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються стаціонарними. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними. Критичні точки – це точки можливого екстремуму.

Теорема 2 (перша достатня умова локального екстремуму)

Нехай x_0 - критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому функція має похідну. Тоді 1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то точка x_0 - локальний максимум функції;

2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то точка x_0 - локальний мінімум функції;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то точка x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

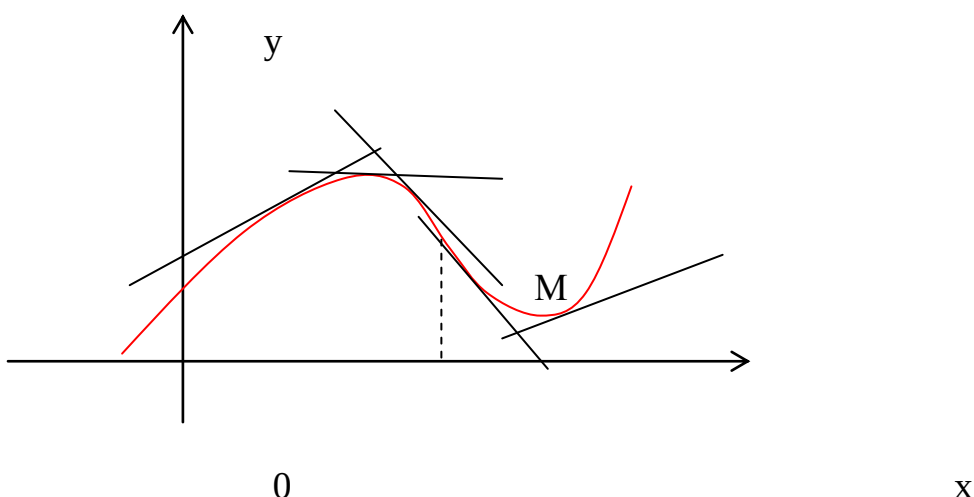
Теорема 3 (друга достатня умова локального екстремуму)

Нехай x_0 - стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимуму.

Проміжки опуклості функції.

Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається вгнутою на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.



Точкою перегику називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої (точка – M).

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на $(a;b)$, тоді 1) якщо $f''(x) < 0, x \in (a;b)$, то графік $y = f(x)$ опуклий на $(a;b)$;

2) якщо $f''(x) > 0, x \in (a;b)$, то графік $y = f(x)$ вгнутий на $(a;b)$;

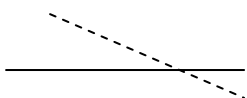
Теорема. Нехай x_0 - критична точка функції $f(x)$. Якщо переходячи через точку x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегику кривої $f(x)$.

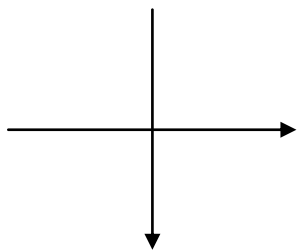
Асимптота кривої

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Існує три типи асимптот.

I тип. Пряма $x = c$ - вертикальна асимптота,

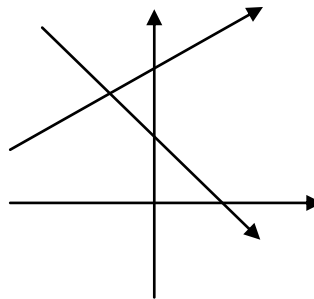
якщо $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \pm\infty$ або $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \pm\infty$





II тип. Пряма $y = b$ - горизонтальна асимптота, якщо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \right)$$



III тип. Пряма $y = kx + b$ - є похилою Асимптотою, якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Асимптоти графіка функції. Будова графіків функції.

Мета заняття розглянути поняття асимптоти функції, їх види; навчитись досліджувати функцію та будувати її графік

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – **2 години**

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 277...280 [1], с. 265	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Приклад.

Знайти асимптоти та побудувати графік функції $y = \frac{x^2}{x-3}$.

1) Знаходимо область визначення функції: $D(y) = \left[\begin{array}{l} -\infty < x < 3 \\ 3 < x < \infty \end{array} \right.$.

2) Функція не є парною, не є непарною, не є періодичною.

3) При $x = 0$ отримаємо $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат.

4) Так як $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} f(x) = \pm \infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою графіка.

Далі обчислюємо $k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3x}{x-3} \right) = 3$$

Звідси прямує, що пряма $y = x + 3$ є похилою асимптотою графіка.

5) Знаходимо похідну:

$$y' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

Похідна y' обертається в нуль в точках $x = 0$ і $x = 6$ і має розрив при $x = 3$. Цими точками числова пряма ділиться на чотири проміжки: $-\infty < x < 0$, $0 < x < 3$, $3 < x < 6$ та $6 < x < \infty$. Дослідимо знак похідної в кожному із них:

- $y' > 0$ на проміжках $-\infty < x < 0$ і $6 < x < \infty$ (на цих проміжках функція зростає)
- $y' < 0$ на проміжках $0 < x < 3$ і $3 < x < 6$ (на цих проміжках функція спадає).

При переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тобто це точка максимуму, а при переході через точку $x = 6$ - з мінуса на плюс, тобто точка мінімуму.

Знаходимо $y(0) = 0$, $y(6) = 12$.

6) Знаходимо другу похідну:

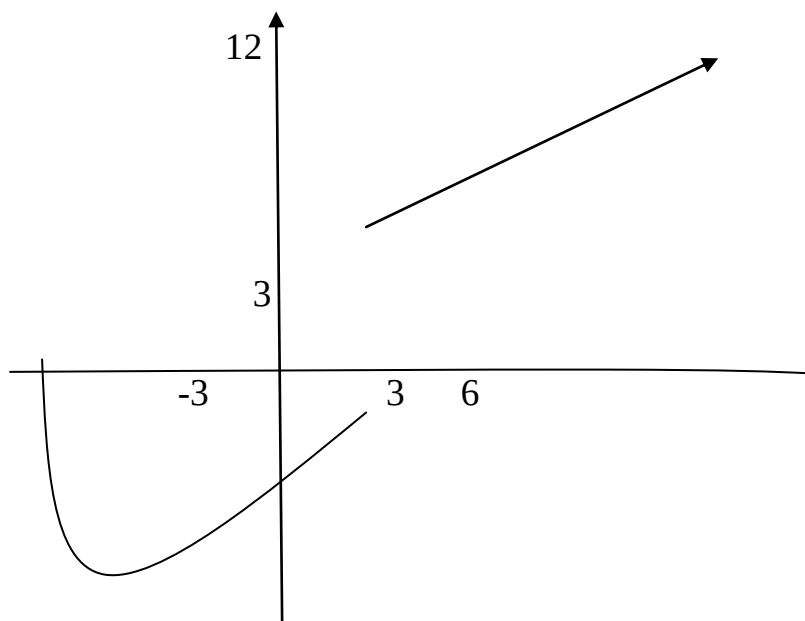
$$y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^3}$$

Друга похідна в нуль ніде не обертається та має розрив у точці $x = 3$.

На проміжку $-\infty < x < 3$ маємо $y'' < 0$, тобто на цьому проміжку крива опукла верх; на проміжку $3 < x < \infty$ маємо $y'' > 0$, тобто на цьому проміжку крива опукла донизу.

Точок перегину немає.

7) Будуємо графік функції:



Розв'язати завдання.

Провести повне дослідження функції і побудувати її графік

1) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

2) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$

3) $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$

4) $y = \frac{(x - 1)^3}{(x - 2)^2}$

5) $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

6) $y = \frac{x^4}{x^3 - 2}$

7) $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$

8) $y = \frac{4x^2}{3 - x}$

9) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

10) $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$

11) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

12) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)^2}$

13) $y = \frac{x^2}{x^4 + 4}$

14) $y = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$

15) $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$

16) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

17) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

18) $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

$$19) y = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$$

$$20) y = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2}$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Частинні похідні і диференціали вищих порядків.

Мета заняття розвинути у студентів практичні навички обчислення частинних похідних і диференціалів вищих порядків.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 20...26	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Приклад.

1. Знайдіть повний і частинний прирости функції $z = x^2 + xy - 2y$ у точці $M(0; 1)$ при $\Delta x = 2$, $\Delta y = -1$.

Розв'язання. Обчислимо значення $z(0; 1)$:

$$z(0; 1) = 0^2 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2,$$

нові значення змінних будуть такі:

$$x + \Delta x = 0 + 2 = 2, y + \Delta y = 1 - 1 = 0;$$

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(2; 0) = 4,$$

$$z(x + \Delta x, y) = z(2; 1) = 4,$$

$$z(x, y + \Delta y) = z(0; 0) = 0.$$

Отже,

$$\Delta z(0; 1) = 4 - (-2) = 6, \Delta_x z = 4 - (-2) = 6, \Delta_y z = 0 - (-2) = 2.$$

2. Знайдіть частинні похідні функції:

а) $z = x^5 y^2 + 2y^3 - x - 4$

б) $u = x \sin(yz) + (x + y^2 + z^3)^5$

в) $z = x^{\ln y}$

г) $u = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} + z^3 2^{x-z}.$

Розв'язання.

Маємо:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y^2 - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx^5 + 6y^2;$

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(yz) + 5(x + y^2 + z^3)^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(yz) * z + 10y(x + y^2 + z^3)^4$

$\frac{\partial u}{\partial z} = x \cos(yz) * y + 15z^2(x + y^2 + z^3)^4.$

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln y) \cdot x^{\ln y - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{\ln y} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{y}$

г) $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x} + x \frac{1}{\cos^2(\frac{y}{x})} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + z^3 2^{x-z} \ln 2,$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{1}{\cos^2(\frac{y}{x})} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2(\frac{y}{x})}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 2^{x-z} + z^3 2^{x-z} (-1) = 2^{x-z} (3z^2 - z^3).$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Дослідження функції багатьох змінних на екстремум.

Мета заняття розвинути у студентів практичні навички дослідження функції багатьох змінних на екстремум.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>

2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 43...45	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ (або $z = f(M)$) визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$.

Функція $z = f(M)$ має в точці *локальний максимум (мінімум)*, якщо існує такий окіл точки M_0 , при якому для всіх відмінних від M_0 точок цього околу виконується нерівність

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0))$$

Точки локального максимуму та мінімуму називають точками локального екстремуму.

Означення локального екстремуму можна сформулювати ще й так.

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 локальний екстремум, якщо у достатньо малому околі точки M_0 приріст функції $\Delta z(M_0)$ зберігає сталий знак, а саме: якщо $\Delta z(M_0) > 0$, то M_0 - точка локального мінімуму, якщо ж $\Delta z(M_0) < 0$, то M_0 - точка локального максимуму.

Далі поняття екстремуму та локального екстремуму будемо ототожнювати.

Наведемо приклади, які ілюструють поняття екстремуму.

1. Функція $z = x^2 + y^2$ досягає мінімуму в точці $(0; 0)$, причому $z_{min} = 0$ (рис. 1.10). Справді, вираз $x^2 + y^2$ завжди невід'ємний і обертається в нуль тільки при $x = y = 0$. Отже, приріст $\Delta z(0; 0) > 0$.
2. Функція $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ має в точці $(0; 0)$ максимум, причому $z_{max} = 2$ (рис. 1.11). Тут $\Delta z(0; 0) < 0$.

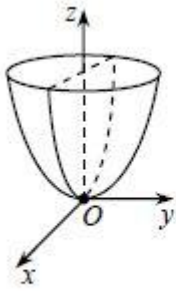


Рис. 1.10

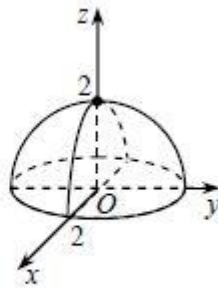


Рис. 1.11

Сформулюємо необхідні та достатні умови існування локального екстремуму.

Теорема (необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують.

Зокрема, якщо $z = f(x, y)$ — диференційована функція і $M_0(x_0, y_0)$ — точка екстремуму, то в цій точці виконується умова

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$

тобто

$$dz(x_0, y_0) = 0.$$

Точку $M_0(x_0, y_0)$, яка задовольняє умову вище, називають *стаціонарною* точкою функції $z = f(x, y)$.

Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називають *критичними* (або точками можливого екстремуму).

Теорема (достатня умова локального екстремуму). Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}, \quad \Delta AC - B^2.$$

Тоді:

3. якщо $\Delta > 0$, $L > 0$ ($C > 0$), то $M_0(x_0, y_0)$ — точка мінімуму,
4. якщо $\Delta > 0$, $L < 0$ ($C < 0$), то $M_0(x_0, y_0)$ — точка максимуму;
5. при $\Delta < 0$ екстремум не існує;
6. при $\Delta = 0$ питання про екстремум відкрите.

Умовний екстремум

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ за умови, що її аргументи зв'язані між собою співвідношенням

$$\varphi(x, y) = 0,$$

яке визначає на площині Oxy деяку лінію L називається *рівнянням зв'язку*. Нехай координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють рівняння зв'язку, тобто точка M_0 лежить на лінії L .

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 умовний мінімум {максимум} за умови зв'язку, якщо існує такий окіл точки M_0 , що для довільної точки $M(x, y)$ ($M \neq M_0$) із цього околу, координати якої задовольняють рівняння зв'язку, виконується нерівність

$$f(M) > f(M_0) \quad (f(M) < f(M_0))$$

Отже, умовний мінімум (максимум) — це найменше (найбільше) значення функції в точці M_0 відносно тільки тих точок із деякого околу точки M_0 , які належать лінії L .

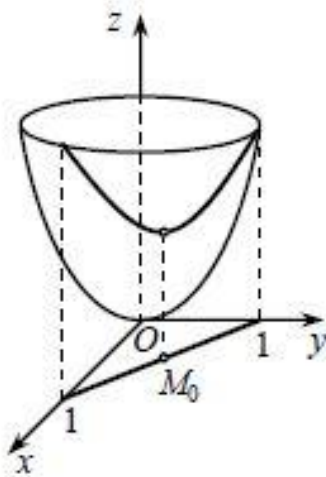


Рис. 1.12

Наприклад, умовний мінімум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y = 1$ досягається у точці $M_0(1/2; 1/2)$, тоді як безмовний екстремум - у точці $O(0; 0)$ (рис. 1.12).

Точки умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$, аргументи якої задовольняють умову (1.12), знаходять так: якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати, наприклад, відносно змінної $y : y = g(x)$, то, підставляючи у функцію $z = f(x, y)$, замість y значення $g(x)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f(x, g(x))$. Оскільки умова зв'язку врахована, то задача відшукування умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної.

Так, у наведеному вище прикладі із рівняння зв'язку одержуємо $y = 1 - x$. Тоді

$$z = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Оскільки $z' = 4x - 2$, $z'' = 4 > 0$, то $x = \frac{1}{2}$ — точка мінімуму функції z , причому $z_{min} = \frac{1}{2}$.

Знаходимо координату y : $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Отже, мінімум функції $z = x^2 + y^2$ за мови $x + y - 1 = 0$ досягається у точці $M_0(1/2; 1/2)$.

Коли ж рівняння зв'язку допускає параметризацію:

$$x = x(t), y = y(t),$$

тобто

$$\varphi(x(t), y(t)) = 0,$$

задача відшукування умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції $z = f(x(t), y(t))$

Проте не завжди рівняння зв'язку можна параметризувати або розв'язати відносно якоїсь змінної. У цьому разі застосовують *метод множників Лагранжа*, суть якого полягає в тому, що задача умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ замінюється задачею відшукування звичайного екстремуму функції Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

де λ — множник Лагранжа, який не залежить від x і y .

Зазначимо, що в довільній точці $M(x,y)$, координати якої задовольняють рівняння зв'язку, виконується рівність:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y).$$

Для відшукування точок можливого екстремуму функції необхідно розв'язати систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0,$$

відносно незалежних змінних x , y та λ .

Якщо x_0, y_0, λ_0 — один із розв'язків системи, то $M_0(x_0, y_0)$ — критична точка функції $z = f(x, y)$ за умови, що $\varphi(x, y) = 0$. Далі досліджують знак другого диференціала d^2L функції Лагранжа, враховуючи співвідношення

$$\partial\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

Якщо $d^2L(M_0) > 0$, то M_0 — точка умовного мінімуму.

Якщо $d^2L(M_0) < 0$, то M_0 — точка умовного максимуму.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Дослідження функції багатьох змінних на екстремум.

Мета заняття розвинути у студентів практичні навички дослідження функції багатьох змінних на екстремум.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 43...45	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Приклад.

1. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2y + xy^3$ у точці (2; 1).

Розв'язання. За умовою $x_0 = 2, y_0 = 1$.

Знаходимо аплікату точки дотику $z_0 = 6$.

Обчислюємо частинні похідні $\frac{dz}{dx}$ та $\frac{dz}{dy}$ у точці дотику:

$$\frac{dz}{dx} = 2xy + y^3, \quad \frac{dz}{dy} = x^2 + 3xy^2; \quad \frac{\partial z(2;1)}{\partial x} = 5; \quad \frac{\partial z(2;1)}{\partial y} = 10.$$

Підставивши ці значення у відповідні формули з таблиць 1.1 і 1.2, дістанемо рівняння дотичної площини

$$z - 6 = 5(x - 2) + 10(y - 1), \text{ або } 5x + 10y - z - 14 = 0$$

і рівняння нормалі

$$\frac{x - 2}{5} = \frac{y - 1}{10} = \frac{z - 6}{-1}$$

2. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$x^3 + y^3 + z^3 + xy^2z^3 = 4$$

у точці $M_0(1; 1; 1)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами, вміщеними у таблицях 1.1 та 1.2. Маємо

$$F = x^3 + y^3 + z^3 + xy^2z^3 - 4; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2z^3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2xyz^3; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 3xy^2z^2;$$

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} = 4; \quad \frac{\partial F(M_0)}{\partial y} = 5; \quad \frac{\partial F(M_0)}{\partial z} = 6;$$

Отже, рівняння дотичної площини

$$4(x - 1) + 5(y - 1) + 6(z - 1) = 0, \text{ або } 4x + 5y + 6z - 15 = 0,$$

рівняння нормалі —

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z - 1}{6}$$

3. Обчисліть похідну функції $u = x^2y + xy^2z + z^3y$ у точці $M(0; 1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\vec{l} = \{-2, 1, 2\}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3, \quad \cos \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Обчислимо частинні похідні даної функції в точці $M(0; 1; -1)$:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 2xy + y^2z \big|_{m=-1}; \quad \frac{\partial u(M)}{\partial y} = x^2 + 2xyz \big|_{m=0};$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = xy^2 + 3z^2 \big|_{m=3}.$$

Підставивши одержані значення у формулу дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-1) * \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 * \frac{1}{3} + 3 * \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Зазначимо, що функція $u(x, y, z)$ у точці M у напрямі вектора $\vec{l}$ зростає, оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Практична робота за темою: «Диференціювання функцій»

Мета заняття сформувати у студентів поняття похідної функції, геометричного, механічного та фізичного змістів похідної, вміння диференціювати елементарні та складені функції, поняття похідної функції вищого порядку, вміння диференціювати показниково - степеневі функції, поняття функції багатьох змінних, похідної за напрямом, вміння обчислювати градієнт функції багатьох змінних, частинні похідні функції багатьох змінних

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 217...280 [4], с. 19...45	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Студентам надаються картки з індивідуальними завданнями з вивченого модуля: «Диференціювання функцій. Частинні похідні функції багатьох змінних. Екстремум функції багатьох змінних»

Завдання на картках:

1. Знайдіть частинні похідні $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}$ та повний диференціал dz функції $z(x, y)$.

1.1. а) $z = 3x^6 + 2x^2y^5 - 4x + 5y^3$; б) $z = xy \log_y x$.

1.2. а) $z = -x^4 + 3xy^4 - 5x^3 + 2$; б) $z = \operatorname{tg} \ln(x^2 - y^2)$.

1.3. а) $z = -3x^3 + 2x^3y^5 - 5y^2 + 1$; б) $z = \arcsin 2^{x/y}$.

1.4. а) $z = 7x^8y - 32xy^4 - 3y + 5$; б) $z = (\arcsin x)^y$.

1.5. а) $z = 6x^6y^3 - 2xy^3 + 4x - 3$; б) $z = xy^3 \ln \sin(x - 2y)$.

1.6. а) $z = 2x^4 - y^3 - 3xy^4 + 4y + 2$; б) $z = \sin^3 x \cos(x + 3y)$.

1.7. а) $z = x^3 - 2y^4 + x^5y + 7x - 1$; б) $z = (y + x) \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.

1.8. а) $z = -x^2y^4 - 2x + y^8 + 2x - 6$; б) $z = 3^{x-y} \ln(x^2 + y^2)$.

1.9. а) $z = -3xy^2 + x^3y - 3y + 3$; б) $z = \operatorname{arccotg} \frac{x}{\ln y}$.

1.10. а) $z = 5x^5y^2 - x + y^6 + 10$; б) $z = \arccos \frac{\ln x}{\sqrt{y}}$.

1.11. а) $z = 7x^4y^2 - 3y^3 + 3x - 4$; б) $z = e^{xy^2}(x^2 - y)$.

1.12. а) $z = -4x^4y^5 - 6x + y^4 - 8$; б) $z = 4^{x^2+y^2}(2x^4 - y^4)$.

1.13. а) $z = -x^2y^3 - 4x - 3y^2 + 7$; б) $z = \sin^5(x^3 + xy - y^3)$.

1.14. а) $z = 2x^7y^4 + 3x^2 - y^4 - 1$; б) $z = \cos^3(x^2 - y^2)$.

1.15. а) $z = -x^4y^4 + 5x^6 - 3y^3 - 2$; б) $z = (e^x \cos y + e^{\sin y})^3$.

1.16. а) $z = 4x^2y^2 - 2x^5 - y + 10$; б) $z = 2^{(x+y)\sin(x-y)}$.

1.17. а) $z = -x^9y^4 + 2x^3 + 4y^3 + 7$; б) $z = \frac{y \ln x}{x \ln y}$.

1.18. а) $z = 3x^2y^5 + 7x^3 - y^{-2} - 5$; б) $z = \frac{y^2 \ln x}{x \ln(y^2 + 1)}$.

$$\begin{array}{ll}
1.19. \quad a) z = 5x^3y^{-3} - 2x^2 + y^4 + 4; & б) z = \frac{y^2 + x^2}{(x + y)^2}. \\
1.20. \quad a) z = -x^4y^2 - 2x\sqrt{y} + 4x - 2; & б) z = \frac{\ln(x - 2y)}{\ln(y + 2x)}. \\
1.21. \quad a) z = 4x^3y^2 + 7\sqrt{x} - y^5 - 6; & б) z = x(\sin x)^{\cos y}. \\
1.22. \quad a) z = -x^7y^6 + 6x^3\sqrt{y} + 4x^3; & б) z = (x + y^2)\sqrt{x + 4y}. \\
1.23. \quad a) z = x^4y^2 - x^2 + 4y^{-3} - 8; & б) z = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y}{x + y}. \\
1.24. \quad a) z = -2x^2y^5 - \sqrt{2x}y^3 + 4y; & б) z = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y}{x^2 + y^2}.
\end{array}$$

2. Знайти частинні похідні функції $z=f(u, v)$, де u і v мають вигляд.

$$2.1. u = x^2 + y^2, v = x - y. \quad 2.2. u = x^2 - y^2, v = xy.$$

$$2.3. u = x + y, v = \frac{x}{y}. \quad 2.4. u = xy, v = x + 3y.$$

$$2.5. u = 2x - 3y, v = xy. \quad 2.6. u = 2x + y, v = xy^2.$$

$$2.7. u = 2xy, v = x^2 - y. \quad 2.8. u = x + y^2, v = x - 4y.$$

$$2.9. u = \sqrt{x} + y, v = x - \sqrt{y}. \quad 2.10. u = x^3 + y^3, v = x + y.$$

$$2.11. u = x^2 - 2y, v = 2x - y. \quad 2.12. u = xy, v = x^3 - y^3.$$

$$2.13. u = x^4 + y, v = x - y^2. \quad 2.14. u = \sqrt{x + y}, v = x^2 + y^2.$$

$$2.15. u = \sqrt{x} - y, v = 2x + y^2. \quad 2.16. u = x^2y, v = 2x + 5y.$$

$$2.17. u = x^2 - y^2, v = xy^{-1} \quad 2.18. u = x^3 - y^3, v = xy.$$

$$2.19. u = x^2y, v = 2x + 7y. \quad 2.20. u = x^2 + 2y^2, v = xy^2.$$

$$2.21. u = 2^x + 2^y, v = x + y. \quad 2.22. u = \sin x - y, v = xy.$$

$$2.23. u = x^2y^{-2}, v = 3x - y. \quad 2.24. u = x^4 - y^4, v = x - y.$$

3. Знайти диференціал dz функції $z(x, y)$ у точці M .

$$3.1. x + y + z + e^z = 0, \quad M(1; -1; 0).$$

$$3.2. x^2 - y + z + \ln z = 0, \quad M(0; 1; 1).$$

$$3.3. \sin(x + y) + \sin(y - z) = 2, \quad M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 0\right).$$

$$3.4. \sin(x + y + z) + z = 0, \quad M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 0\right).$$

$$3.5. e^{x+2} + e^{y+2} = 2, \quad M(0; 0; 0).$$

$$3.6. 2xy + yz + z^3 = 0, \quad M(-1; 1; 1).$$

$$3.7. xyz + e^z = x, \quad M(1; 2; 0).$$

$$3.8. x - y - z = \operatorname{tg} z, \quad M(2; 2; 0).$$

$$3.9. e^{xyz} = z, \quad M(0; 1; 1).$$

$$3.10. \ln z + \ln x = y - 1, \quad M(1; 1; 0).$$

$$3.11. xyz = \ln z, \quad M(0; 1; 1).$$

$$3.12. x + 4y - z = e^z, \quad M(-3; 1; 0).$$

$$3.13. \cos z + \cos(x + y + z) = 0, \quad M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 0\right).$$

$$3.14. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 4z, \quad M(8; 1; 1).$$

$$3.15. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 2 \cos z, \quad M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 0\right).$$

$$3.16. x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x + 5 = 0, \quad M(-2; 1; 0).$$

$$3.17. x^2 + y^2 + 2z^2 + xy + 4y - 4 = 0, \quad M(1; 1; 2).$$

$$3.18. 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz - 3 = 0; \quad M(1; 2; 1).$$

$$3.19. 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9 = 0, \quad M(1; -2; 1).$$

$$3.20. x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y - 13 = 0, \quad M(3; 1; 2).$$

$$3.21. y^2 + z^2 + x - 2z = 0, \quad M(1; 1; 1).$$

$$3.22. y^2 + z^2 - xy - z(y + x) = 0, \quad M(1; 2; 1).$$

$$3.23. 2(x^4 + y^4 + z^4) - 3xyz = 0, \quad M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$3.24. \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - 1 = 0, \quad M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 0\right).$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Визначений інтеграл, його властивості і обчислення.

розвинути у студентів практичні навички обчислювання визначеного

Мета заняття інтеграла.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 321	15хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Властивості визначеного інтеграла

Якщо всі розглядувані функції інтегровані на виділених відрізках інтегрування, то:

- 1) постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \alpha = const;$$

- 2) інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

- 3) якщо відрізок інтегрування розбитий на частини, то інтеграл на всьому відрізку дорівнює сумі інтегралів для кожної з утворених частин, тобто за будь-яких $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

- 4) якщо на відрізку $[a; b]$, виконується $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Наслідок. Нехай на відрізку $[a; b]$, де $a < b$, виконується $m \leq f(x) \leq M$, де m та M — деякі числа, тоді $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

Приклад. Оцінити інтеграл $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Розв'язання. Згідно з наслідком четвертої властивості $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$, де m та M — відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Знайдемо m та M для функції $f(x) = x^2 e^x$:

$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = 0$; $e^x x(2 + x) = 0$, $x = 0$, $x = -2$ - останнє значення не належить заданому проміжку.

На відрізку $[0; 1]$ $f'(x) > 0$. Отже, функція монотонно зростає, тому $M(1) = 1^2 e^1 = e$;
 $m = f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$.

Довжина відрізка інтегрування $(b - a) = 1 - 0 = 1$. Отже, для цього інтеграла можлива оцінка $0 \cdot 1 \leq \int_0^1 x^2 e^x dx \leq e \cdot 1$

Відповідь: $0 \leq \int_0^1 x^2 e^x dx \leq 1$.

Формула Ньютона — Лейбніца

Зважаючи на властивості інтеграла зі змінною верхньою границею, знайдемо основну формулу інтегрального числення, традиційно пов'язану з іменами І. Ньютона та Г.В. Лейбніца.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та $F(x)$ — будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a; b]$. Тоді визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a; b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доведення. Нехай $F(x)$ — деяка первісна для функції $f(x)$. За властивістю первісної функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ також є первісною для функції $f(x)$, і за теоремою знайдеться таке число C , що $F(x) = \Phi(x) + C$. Тоді для приросту первісної маємо

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx.$$

Оскільки $\int_a^a f(x)dx = 0$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Потрібно зазначити, що знаходження визначених інтегралів з використанням формули Ньютона — Лейбніца здійснюється у два кроки: спочатку, використовуючи техніку знаходження невизначеного інтеграла, знаходять деяку первісну $F(x)$ для підінтегрального виразу $f(x)$. Потім використовують власне формулу Ньютона — Лейбніца — знаходять приріст первісної, який дорівнює шуканому інтегралу.

Тому введемо позначення для приросту первісної, яке зручно використовувати:

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для використання формули Ньютона — Лейбніца можна використовувати будь-яку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, наприклад яка має найпростіший вигляд при $C = 0$. Зазвичай саме так і здійснюють обчислення визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити:

$$1) \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}; \quad 6) \int_1^2 2^{3x-4} dx = \left. \left(\frac{1}{3 \ln 2} 2^{3x-4} \right) \right|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} (2^{3 \cdot 2 - 4} - 2^{3 \cdot 1 - 4}) = \frac{1}{3 \ln 2} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}.$$

$$2) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left. \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \right|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2\frac{2}{3}$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos x dx = 4 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = 4 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,54$$

Обчислити визначені інтеграли:

- 1) $\int_1^2 x dx$, 2) $\int_0^3 x^2 dx$, 3) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^3 dx$, 4) $\int_0^1 (2x + 1) dx$,
 5) $\int_{-1}^0 (3x^2 + 1) dx$, 6) $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}t + 4t^2 \right) dt$, 7) $\int_1^2 2\pi(1 + x^2) dx$,
 8) $\int_1^4 \left(3x^2 - 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$, 9) $\int_2^8 \frac{2+x}{x^2} dx$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ: [Б2] с. 244, [Б1]с. 283, [Д2]с. 77-81

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема

Інтегрування частинами.

Мета заняття

сформувати у студентів поняття інтегрування методом інтегрування частинами, розвинути у студентів практичні навички обчислювання інтеграла цим методом.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 80...81	15хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні.

Тоді формула $\int u dv = uv - \int v du$ називається формулою інтегрування частинами. Вона дає змогу перейти від інтеграла $\int u dv$ до інтеграла $\int v du$.

Для відшукування інтеграла $\int f(x) dx$ за частинами вираз $f(x) dx$ намагаються подати у вигляді $u dv$ так, щоб інтеграл $\int v du$ набував простішого вигляду порівняно з даним інтегралом.

Наведемо деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами:

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах за u слід узяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;
2. Інтеграли виду $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах слід узяти $dv = P(x) dx$, а за u – вираз, що залишився;
3. Інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, де α, β – дійсні числа. Після двократного застосування методу інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. З цього рівняння знаходять інтеграл.

Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами.

$$1. \int \arcsin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right\} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$2. \int x \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \\ du = \frac{dx}{x+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1+1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} (x-1)^2 - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

$$3. \int x e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^{2x} dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$4. \int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 - 2x + 5 \\ du = (2x - 2) dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -(x^2 - 2x + 5) e^{-x} + \int (2x - 2) e^{-x} dx =$$

$$= \begin{cases} u = x - 1 & dv = e^{-x} dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + 2(-e^{-x}(x - 1) + \int e^{-x} dx + C_1) =$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} - e^{-x} + C = -(x^2 + 5)e^{-x} + C$$

Обчислити наступні інтеграли:

1. а) $\int (6 - 5x)e^{-3x} dx$

б) $\int x^2 \cos 3x dx$

2. а) $\int \arctg \sqrt{8x - 1} dx$

б) $\int (x^2 + 4)e^{-x} dx$

3. а) $\int (6x - 3) \cos 2x dx$

б) $\int \ln^2 2x dx$

4. а) $\int \ln(x^2 + 9) dx$

б) $\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx$

5. а) $\int x \ln^2 x dx$

б) $\int (x + 1)^2 \cos x dx$

6. а) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

б) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx$

7. а) $\int x \cos^2(x + 1) dx$

б) $\int x^2 e^{-x/2} dx$

8. а) $\int x^2 \ln x dx$

б) $\int (x^2 - 2) \cos x dx$

9. а) $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$

б) $\int (\arcsin x)^2 dx$

10. а) $\int x \arctg x dx$

б) $\int \frac{x^2 + 2}{e^{3x}} dx$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема

Обов'язкова контрольна робота

перевірити ступінь засвоєння знань студентами навчальної дисципліни

Мета заняття

«математичний аналіз»

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>

3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю</i> (фронтальне опитування), <i>узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 82...92	15хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Студентам надаються картки з індивідуальними завданнями з вивчених модулів: «Комплексні числа. Границі функцій. Диференціювання функцій. Частинні похідні функції багатьох змінних. Екстремум функції багатьох змінних. Інтегрування функцій.»

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Дослідження рядів на збіжність

Мета заняття розвинути у студентів практичні навички дослідження рядів на збіжність.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю</i> (фронтальне опитування), <i>узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [7], с. 9...14	15хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

7. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 3. – 275 с

Навчальні матеріали

1. Доведіть за означенням збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^n - 7^n}{14^n}$ і знайдіть його суму.

Розв'язання. Обчислимо n -у частинну суму ряду.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5 \cdot 7 - 7}{14} + \frac{5 \cdot 2^2 - 7^2}{14^2} + \dots + \frac{5 \cdot 2^n - 7^n}{14^n} = \frac{5}{7} - \frac{1}{2} + \frac{5}{7^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{5}{7^n} - \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{5}{7} \left(1 + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7^{n-1}} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{7^n}}{1 - \frac{1}{7}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \left(1 - \frac{1}{7^n} \right) - \\ &\left(1 - \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, то існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$, це значить, що заданий ряд збіжний і його сума $S = -\frac{1}{6}$.

2. Знайдіть суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання. Розклавши загальний член ряду на елементарні дроби, дістанемо

$$u_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, сума ряду $S = \frac{1}{2}$.

3. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+5} = \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{2}{n+5} + \dots$.

Розв'язання. Цей ряд дістаємо із гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, якщо його домножити на 2 і відкинути перші п'ять членів. Гармонічний ряд розбіжний, а добуток ряду на ненульове число і відкидання скінченної кількості членів не порушує його розбіжності. Тому заданий ряд розбіжний.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{100n+7}$

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{100n+7} = \frac{3}{100} \neq 0$, то ряд розбіжний.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$.

Розв'язання. Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{-\frac{n+1-2n}{2} \cdot \frac{2n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2n}{n+1}} = \\ &e^{-2} \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, ряд розбіжний.

Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи ознаки порівняння.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є відношенням многочленів першого і третього степенів, степінь знаменника на 2 більший від степеня чисельника.

Отже, для порівняння вибираємо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Оскільки $\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний, то за ознакою порівняння заданий ряд збіжний.

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Розв'язання. Покажемо, що ряд розбігається. Справді, з нерівності $\ln n < n$ випливає нерівність $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ ($n = 2, 3, \dots$). Оскільки члени заданого ряду більші від відповідних членів розбіжного гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, то ряд розбіжний.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+4}}$.

Розв'язання. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ розбіжний ($p = \frac{1}{4} < 1$) і

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{2n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{2n+4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad (0 < k < \infty),$$

то за граничною ознакою порівняння вихідний ряд також розбіжний.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(\sqrt{n}+5)}$.

Розв'язання. Загальний член даного ряду задовольняє нерівність

$$u_n = \frac{\cos^2 n}{n(\sqrt{n}+5)} \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+5)} < \frac{1}{n^{1,5}}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,5}}$ збіжний ($P = 1,5 > 1$) тому заданий ряд також збіжний.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{3}{2n+1}$.

Розв'язання. Порівняємо ряд із розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Враховуючи еквівалентність $\arcsin x \sim x$, коли $x \rightarrow 0$, обчислюємо границю

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{3}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд розбіжний.

Дослідіть на збіжність ряди, користуючись ознаками Д'Аламбера або Коші.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{(2n+1)!}$.

Розв'язання. Наявність факторіала зазвичай указує на доцільність застосування ознаки Д'Аламбера. Маємо

$$u_n = \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{(2n+1)!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+2)^3 \cdot 3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!};$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 \cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)^3 \cdot 3^n} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^3 \frac{(2n+1)!}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)!} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$$

Отже, ряд збіжний.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{nn!}}.$

Розв'язання. Застосуємо спочатку ознаку Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{n^n}{e^{nn!}}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{(n+1)(n+1)!}};$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{(n+1)(n+1)!}} \cdot \frac{e^{nn!}}{n^n} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n} \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1$$

Отже, питання про збіжність ряду залишається відкритим. Застосування ознаки Коші також нічого не дає. Результат дає використання формули Стрілінга

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

звідки дістаємо еквівалентність $\frac{n^n}{e^{nn!}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, n \rightarrow \infty$. Виходить, що заданий ряд поводить себе так само, як і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, n \rightarrow \infty$, який є розбіжним $\left(p = \frac{1}{2} < 1 \right)$.

Отже, заданий ряд також розбіжний.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$

Розв'язання. Цей ряд зручно досліджувати за радикальною ознакою Коші маємо

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1, \quad \text{отже,}$$

ряд розбіжний.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші дістанемо

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1.$$

Якщо скористатися ознакою Д'Аламбера, досягнемо такого самого результату. Доведемо збіжність ряду, використовуючи ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Знайдемо спочатку границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^{\sqrt{x}}} = \left| \sqrt{x} = t \right|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{2^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^3}{2^t \ln 2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12t^2}{2^t (\ln 2)^2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{24t}{2^t (\ln 2)^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{24}{2^t (\ln 2)^4} = 0.$$

Звідси випливає, що починаючи з деякого номера N_0 виконується нерівність, $2^{\sqrt{n}} > n^2$ або $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^2}$ ($n \geq N_0$). Отже, $\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ і, оскільки відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність, доходимо висновку про збіжність початкового ряду.

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{(x+2) \ln(x+2)}$ задовольняє умови інтегральної ознаки, тому задача зводиться до дослідження збіжності невластного інтеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2) \ln(x+2)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{d(\ln(x+2))}{\ln(x+2)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln|\ln(x+2)| \Big|_1^A = \\ = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln|\ln(A+2)| - \ln \ln 3) = \infty$$

Невластний інтеграл розбіжний, отже заданий ряд також розбіжний.

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n^2+1) \ln^2(n+1)}.$$

Розв'язання. При $n \rightarrow \infty$ справджуються еквівалентності

$$\frac{n}{(2n^2+1)} \sim \frac{1}{2n}, \ln(n+1) \sim \ln n,$$

тому згідно з граничною ознакою порівняння заданий ряд збігається або розбігається разом із рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \ln^2 n}$. Застосуємо до останнього ряду інтегральну ознаку Коші:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{\ln x} \right|_2^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Невластний інтеграл збіжний, отже, вихідний ряд також збіжний.

Дослідіть на абсолютну й умовну збіжність знакозмінні ряди.

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

Ряд складений з модулів членів заданого ряду, і застосуємо до цього ряду радикальну

$$\text{ознаку Коші. Дістанемо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$$

Отже, ряд з модулів членів заданого ряду збіжний, тому заданий ряд збігається, причому абсолютно.

$$19. 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}.$$

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0$, то заданий ряд розбігається.

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}.$$

Ряд складений із модулів членів заданого ряду, і застосуємо до цього ряду ознаку

$$\text{Д'Аламбера. Дістанемо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+2} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, ряд із модулів членів збігається, тому збігається і початковий ряд, причому збіжність є абсолютною.